Метод рационализации при решении логарифмических неравенств с переменным основанием

При решении неравенств

$$\log_{6x}(x^2 - 17x + 60) \le 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\log_{6x}(x^2 - 17x + 60) \le \log_{6x} 6x$$

Вам пришлось воспользоваться следующей схемой решения логарифмических неравенств с переменным основанием:

$$\log_{f(x)} g(x) \le \log_{f(x)} h(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \le h(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) \le g(x) \\ h(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Т.е. надо рассмотреть 2 случая: основание больше 1 или основание меньше 1.

Если посмотреть на эти формулы внимательно, то можно заметить, что знак разности $g(x) - h(x)$ совпадает со знаком разности $\log_{f(x)}g(x) - \log_{f(x)}h(x)$ в случае возрастающей функции ($f(x) > 1$, т.е. $f(x) - 1 > 0$) и противоположен знаку разности $\log_{f(x)}g(x) - \log_{f(x)}h(x)$ в случае убывающей функции ($0 < f(x) < 1$, т.е. $f(x) - 1 < 0$)

Следовательно, данную совокупность можно свести к системе рациональных неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \quad (1) \\ f(x) \ne 1 \quad (2) \\ h(x) > 0 \quad (3) \\ g(x) > 0 \quad (4) \\ (f(x) - 1)(g(x) - h(x)) \le 0 \quad (5) \end{cases}$$

В этом и заключается суть метода рационализации – заменить более сложное выражение A на более простое выражение B, являющееся рациональным. При этом неравенство B V 0 будет равносильно неравенству A V 0 на области определения выражения A.

Пример 1. Перепишем неравенство $\log_{x+7}(3x + 18) \le \log_{x+7}(x + 5)$ в виде равносильной системы рациональных неравенств.

$$\begin{cases} x + 7 > 0 \ (1) \\ x + 7 \ne 1 \ (2) \\ 3x + 18 > 0 \ (3) \\ x + 5 > 0 \ (4) \\ (x + 7 - 1)(3x + 18 - x - 5) \le 0 \ (5) \end{cases}$$

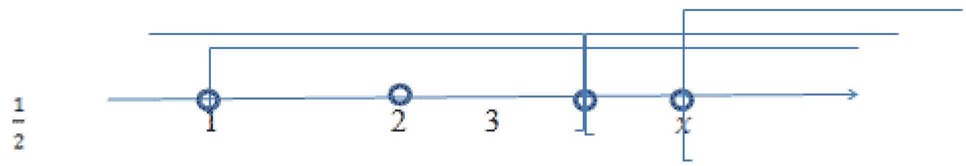
Замечу, что условия (1)–(4) являются условиями области определения неравенства, которую я рекомендую найти в начале решения.

Пример 2. Решить неравенство методом рационализации:

$$\log_{2x-1}(x^2-5x+6) < \log_{2x-1}(2x-4)$$

Область определения неравенства задается условиями:

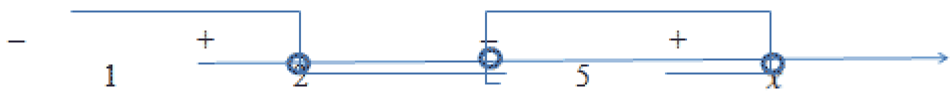
$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ 2x-1\neq 1 \\ x^2-5x+6>0 \\ 2x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x\neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x<2 \\ x>3 \end{array}\right. \\ x>2 \end{cases}$$



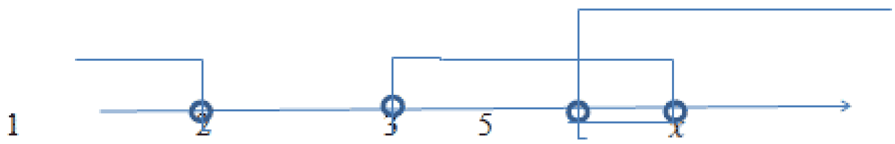
Получим: $x \in (3;+\infty)$

Осталось записать неравенство (5)

$$(2x-1-1)(x^2-5x+6-2x+4)<0$$
$$\Leftrightarrow 2(x-1)(x^2-7x+10)<0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-5)(x-2))<0$$



С учетом области определения



$x \in (3;5)$

Ответ: (3; 5)